研究会報告

Li－Yorkeカオスは見えるか？

静岡大教養　　　　馬場　良和

微分方程式や差分方程式によって記述される決定論的現象のなかに、不規則現象と思われるものが出現していることの数学的説明が、1975年に発表された Li-Yorke の定理である[1] 。この定理はこうした現象をうまく説明したものと信じられ、「カオス」ということばがそれに用いられるようになり、カオスの研究が爆発的になされるようになった。

しかし、すでに翌1976年にはM.B.Nathanson が、Li-Yorkeの定理に登場する非可算な scrambled set Ｓの（ルベーグ）測度が０となる例を発表していた[2] 。それは、ｐを３以上の整数、$0 < \delta < 1/2^p$ とし、ｆを

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + 1/p &&, \ 0 \leqq x \leqq (p-1)/p \\
&= 1 - (1-\delta)\{x - (p-1)/p\} / \delta &&, \ (p-1)/p < x < (p-1)/p + \delta \\
&= x - (p-1)/p &&, \ (p-1)/p + \delta \leqq x \leqq 1
\end{aligned}
$$

によって定義される区間[0,1] 上の連続関数とすると、ｆは周期３をもつ（したがって、Li-Yorkeの意味でのカオスが発生している）が、この区間のほとんどすべての点は、ｐ周期点であるか、究極的にはｐ周期軌道に落ち込む点である（したがって、Ｓの測度＝０である）というものである。

その後は、Ｓの測度が正であるものや区間全体の測度に一致するような例が、むしろ例外的であり（[3] ほか）、通常の場合Ｓ（が可測集合ならば）の測度は０なのではないかと信じられるような状況になっている（[4] ほか）。表題の「Li-Yorkeカオスは見えるか？」は、Ｓの測度が０ならばそのカオスは物理的には観測されないのではないか、ということである。

[1] T.Y.Li and J.A.Yorke,Period three implies chaos,Amer.Math.Monthly 82(1975),985-992.

[2] M.B.Nathanson,Piecewise linear functions with almost all points eventually periodic,Proc.Amer.Math.Soc.60(1976),75-81.

[3] M.Misiurewicz,Chaos almost everywhere,Springer Lecture Notes in Math.1186(1986),125-130.

[4] J.Smital,A chaotic function with some extremal properties,Proc.Amer.Math.Soc.87(1983),54-56.